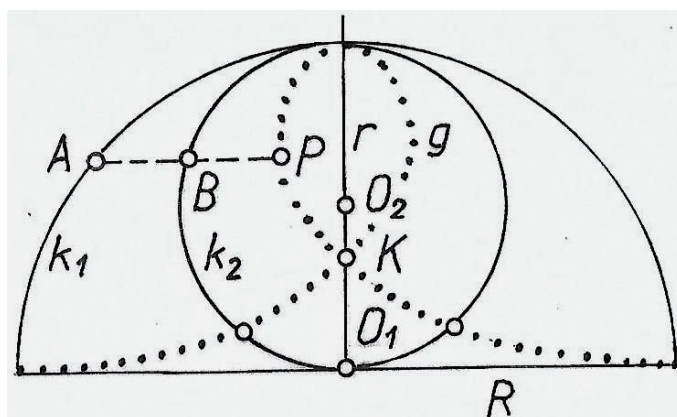


EGY CRAMER - FÉLE GÖRBE

Hajdu Endre

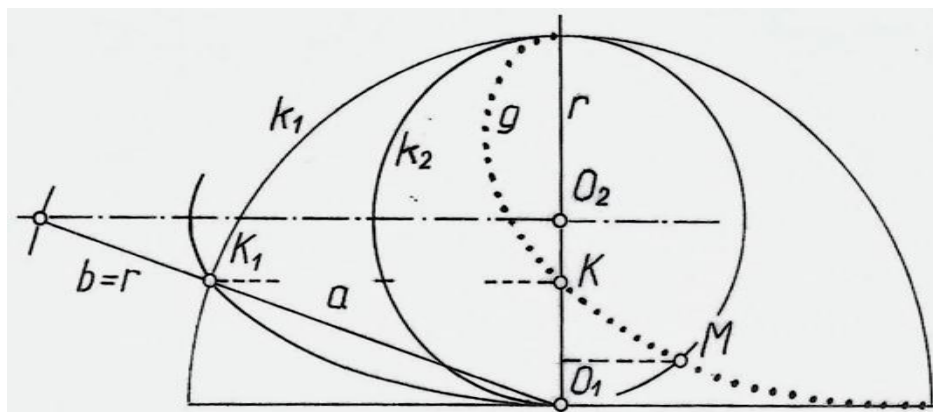
Egy R sugarú félkörbe írt $r = R/2$ sugarú kör közös szimmetriatengelye a két alakzat középpontjait összekötő egyenes (1. ábra). A félkört határoló szakasszal párhuzamos valamely egyenes és a két görbe közös pontjai legyenek A és B . Az A pontot B -re tükrözve nyert pont P . Ha az A pont befutja a félkör vonalat, akkor P egy szimmetrikus g görbét ír le. Ezt a görbét ismerteti a jelen dolgozat. Egyszerűség kedvéért a továbbiakban csak a görbe felét értjük g -n.



1. ábra

Nevezetes pontok

K pont: g és a szimmetriatengely közös pontja. Mivel az imént látott pont-transzformáció olyan, hogy a szimmetriatengely kis körbe eső pontjainak a megfelelői egy O_2 középpontú, $a = 2r$, $b = r$ adatokkal rendelkező ellipszist alkotnak (2. ábra), K -nak k_1 -re eső megfelelője ez utóbbi kör és az ellipszis közös pontja.



2. ábra

E pont szerkesztése azt az ismert ellipszistulajdonságot aknázza ki, hogy e görbe

egy $a+b$ hosszúságú mozgó szakasz egy pontjának pályagörbéje, ha a szakasz végpontjai az ellipszis tengely-egyenesein mozognak. Az O_1 középpontú, $a+b$ sugarú körív és az ellipszis nagytengely egyenesének metszéspontja az említett mozgó szakasz másik végpontja, az ettől $b = r$ távolságra a K_1 pont az, melynek birtokában K kijelölhető.

A másik nevezetes pont, a g görbe és a k_2 kör M metszéspontja hasonló módon szerkeszthető, mint K , de meghatározására a későbbiekben kerül sor, számítás-sal.

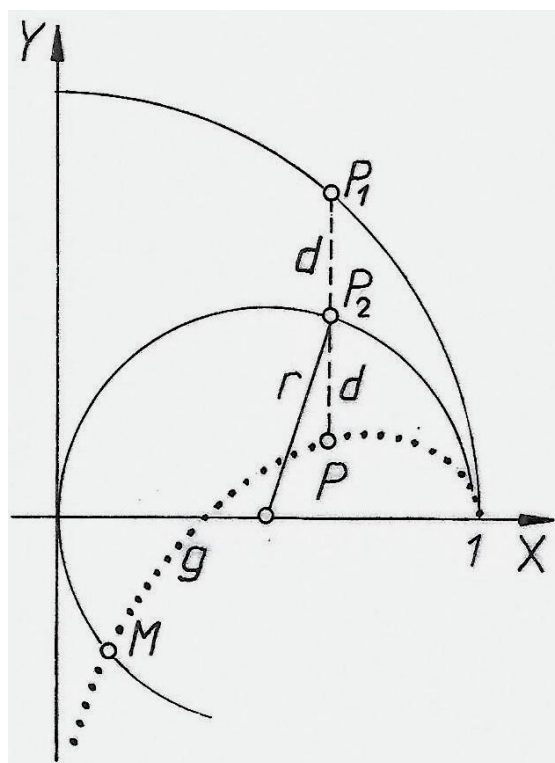
A g görbe egyenlete

A továbbiakban a görbe származtatásához használt félkör sugarát az egyszerűség kedvéért egységnyinek vesszük, s továbbra is csak g egyik ágáról esik majd szó. A 3. ábrán a nagy kör egyenlete

$x^2 + y^2 = 1$. A P pont koordinátái $x; \sqrt{1-x^2} - 2d$. Mivel a kis kör egyenlete

$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$, $y = \sqrt{x-x^2}$, a d távolság a P_1P_2 pontok y koordinátáinak

különbsége $d = \sqrt{1-x^2} - \sqrt{x-x^2}$, ezért g egyenlete $y = 2\sqrt{x-x^2} - \sqrt{1-x^2}$.



3. ábra

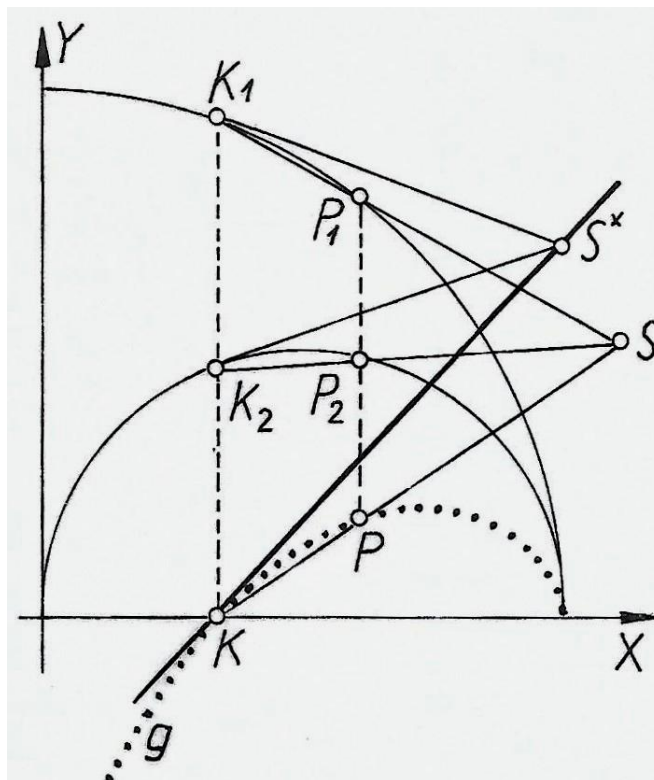
A görbe M pontjának koordinátája kiszámításakor figyelembe veendő, hogy a kis kör alsó részének egyenlete a felső rész egyenletének negatívja, ezért

$-\sqrt{x-x^2} = 2\sqrt{x-x^2} - \sqrt{1-x^2}$, amiből a $8x^2 - 9x + 1 = 0$ egyenlet adódik, melynek gyökei $x_1 = 0,125$ és $x_2 = 1$. Az x_1 értéket a kis kör egyenletébe helyettesítve az M pont koordinátái $(0,125; \approx -0,3307)$.

Érintőszerkesztés

A g görbe érintőjének szerkesztése meglepően egyszerű; ugyanis a görbe valamely P pontjának, valamint P_1, P_2 megfelelőinek a g, k_1 és k_2 körökhöz tartozó érintői egy pontban metszik egymást, s az utóbbi két kör érintője, s így metszéspontjuk is könnyen előállítható (4. ábra). Magyarázat: két egymással párhuzamos szakasz, mint KK_1 és PP_1 , melyeket egy-egy pont azonos osztó - viszony szerint választ el (felez), mint K_2 ill. P_2 , perspektív helyzetben van, melynek centruma a megfelelő pontpárokat összekötő egyenesek közös S pontja. Példaképp a görbe K pontjában szerkesztjük meg az érintőt.

Ha $P_1 \rightarrow K_1$ és $P_2 \rightarrow K_2$, akkor az összekötő egyenesek határhelyzetei a k_1 és k_2 körök érintői, (melyek metszéspontja az S pont S^* határhelyzete), csakúgy, mint a PK egyenes határhelyzete a g görbe K -beli KS^* érintője.



4. ábra

Szélsőérték-meghatározások

A görbe maximum-pontjának meghatározásához és a továbbiakban esedékes

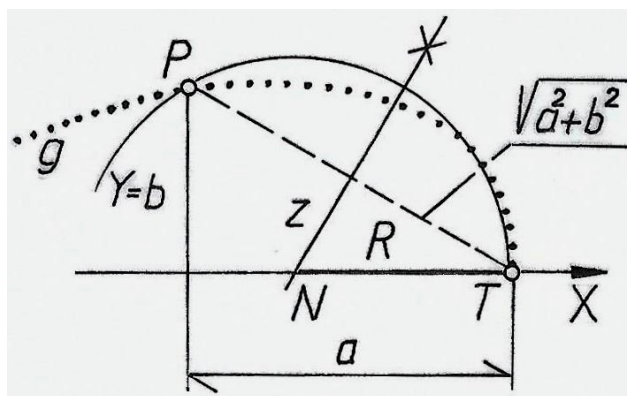
$$y' = \frac{1-2x}{\sqrt{x-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y'' = \frac{-2\sqrt{x-x^2} - (1-2x)\frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}}{x-x^2} + \frac{\sqrt{1-x^2} - x\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}.$$

Ennek a negyedfokú egyenletnek az egyik, három tizedesig pontos közelítő értéke $x \approx 0,742$, a hozzá tartozó függvényérték $y \approx 0,2046$. Ezek a koordináták a q görbe „legfelső” pontjának helyét jelölik ki.

Simulókör a T tengelypontban: ebben a pontban az első derivált értéke ∞ , a második derivált 0, a határérték meghatározására a következő megoldás tűnik alkalmasnak: a g görbe szimmetriájából következőleg a T - beli simulókör középpontja az x tengelyen van, a görbe valamely P pontjának és a T pontnak felező merőlegese jelöli ki a simulókör középpontját, ha $P \rightarrow T$, pontosabban: a felező merőleges és az x tengely közös N pontjának határhelyzete a keresett O_T pont a simulókör középpontja, a görbületi sugár ρ_T . Az 5. ábra jelöléseivel

$$a^2 = (1-x)^2 = 1-2x+x^2 \quad b^2 = (2\sqrt{x-x^2} - \sqrt{1-x^2})^2 = 1+4x-5x^2-4\sqrt{x-x^2-x^3+x^4}.$$

$$2a = 2(1-x)$$



Ha $x \rightarrow 1$ az alábbi határérték számításban, akkor a T -beli simulókör sugara

$$\rho_T = \lim \frac{a^2 + b^2}{2a} = \lim \frac{1 - 2x + x^2 + 1 + 4x - 5x^2 - 4\sqrt{x - x^2 - x^3 + x^4}}{2(1 - x)}.$$

A négyzetgyök jel alatti kifejezés átalakítható $(1 - x)\sqrt{x(1 + x)}$ alakúra, s végül $(1 - x)$ -szel egyszerűsítve $\rho_T = \lim 2\left(\left(x + \frac{1}{2}\right) - \sqrt{x(1 + x)}\right)$
 $\rho_T \approx 0,172$.

A másik kiszemelt pont, melynek simulókörét a szokásos módon határozzuk

meg, a görbe K pontja. Itt $y' = \frac{1 - 2\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{9}}} + \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1 - \frac{1}{9}}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \approx 1,0606$.

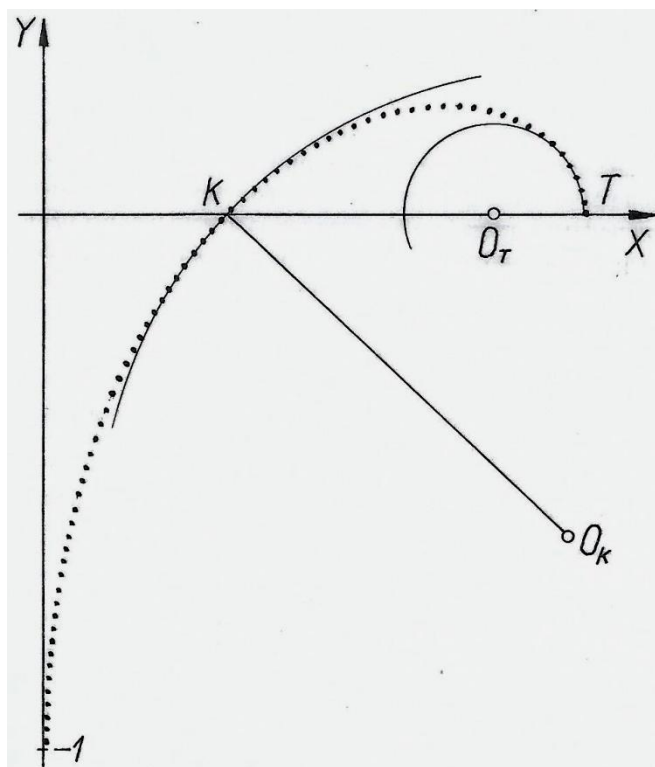
A másik derivált kellő átalakítások után ilyen alakot ölt:

$$y'' = \frac{-1}{2[x(1 - x)]^{1,5}} + \frac{1}{(1 - x^2)^{1,5}}. \text{ Ennek közelítő értéke: } y'' \approx -3,5825.$$

A simulókör sugarának ismert képletébe helyettesítve

$$\rho_K = \frac{\left[1 + \frac{9}{8}\right]^{1,5}}{3,5825}, \quad \underline{\underline{\rho_K \approx 0,864.}}$$

A 6. ábra szemlélteti a g görbét, annak T és K pontjához tartozó simulókörével.



6. ábra

A görbe ($0 - 1/3$) szakasza fölötti (negatív) területének abszolút értéke egyenlő a következő görberész alatti területtel, mindkettőre $T \approx 0,09788$.

A görbedarab hossza: $L \approx 1,9139$.

A T és L értékek számítógéppel nyert adatok.

(Galgóczi Gyulának köszönöm meg számítógépi segítségét.)

Aligha új görbe a tárgyalt alakzat, noha nem tartozik a közismertek közé; utánanézve *H. Wieleitner* gazdag, és 120 év után újra kiadott könyvében, találtam a g -vel rokon, *G. Cramertől* származó görbét.

Irodalom:

1. ***H. Wieleitner***: Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung
Leipzig 1905.
2. ***G. Cramer***: Introduction á l'Analyse des Lignes Courbes Algebriques
Genf 1750.

Sopron, 2020. 10. 02.